Analysis

Zentraltext für Ableitungen

In diesem Text findet man

1. den umfassenden Wegweiser zu allen Texten,
deren Hauptthema Ableitungen sind.

2. Zu jeder Ableitungsregel und zu jeder wichtigen Funktionsart
Beispiele und Aufgaben zum Wiederholen.

Datei 41100

Stand 3. Januar 2011

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Problem einer jeden Bibliothek ist sehr oft das Suchen und Finden eines geeigneten Textes.
Da es sehr viele Texte zu Ableitungen gibt, die zudem noch über diverse Funktionenbereiche verteilt sind, habe ich diesen „Zentraltext für Ableitungen“ angefertigt.
Er bringt eine ziemlich tief gehende Übersicht über Ableitungen von allerlei Funktionen.
Und zu jedem Thema findet man Verweise auf andere Texte, die noch mehr Übungen bereitstellen.
Außerdem folgt jetzt gleich eine Übersichtsliste aller Funktionen, in denen es um das „handwerkliche“ Ableiten geht, also nicht um deren Anwendungen.

41100	Zentraltext für Ableitungen (Dieser Text)
41101	Ableitungen mit der Grenzwertmethode berechnen. Beweis einiger Ableitungsregeln mit der Grenzwertmethode.
41102	Hier werden nur mit der Potenzregel, der Regel für konstante Faktoren und der Summenregel ganzrationale Funktionen abgeleitet, dann gebrochen-rationale Funktionen, die man in die Potenzschreibweise setzen kann, und ebenso einfache Wurzelfunktionen. Kettenregel, Produktregel und Quotientenregel werden nicht verwendet,
41103	Kettenregel mit Anwendungen auf viele Funktionsarten
41105	Implizite Ableitungen (Teil 1 auf (höherem) Schulniveau)
41113	Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, Differenzierbarkeit.
41130	50 Ableitungsbeispiele (Arbeit eines Schülers)
43015	Ableitung gebrochen rationaler Funktionen – Quotientenregel
43016	Übungsaufgaben aus 43015
44012	Ableitung von Wurzelfunktionen, auch komplizierte Funktionen.
45015	Ableitung von Exponentialfunktionen.
45021	Ableitung von Exponentialfunktionen mit vollständiger Induktion
46012	Ableitung von Logarithmusfunktionen
47015	Ableitung von trigonometrischen Funktionen
51020	Implizite Ableitungen (Teil 2 für Studenten) Februar 2011.

Inhalt

Die Lösungen der Aufgaben befinden sich zum Teil in diesem Text ab Seite 37, zum Teil auch in den anderen Ableitungstexten.

4.1 Funktionsterme ohne Summe im Nenner

Beispiele

(1) $\boxed{f(x)=\frac{4}{x^2}=4x^{-2}}$ Ableitung: $\boxed{f'(x)=4\left(-2x^{-3}\right)=-8x^{-3}=-\frac{8}{x^3}}$

Dieses Beispiel ist als Musterbeispiel anzusehen. Man wandelt den Bruch in ein Produkt aus Zahl und x-Potenz um. Bei Ableiten bleibt der Faktor 4 stehen und die x-Potenz wird mit der Potenzregel abgeleitet, indem man den alten Exponenten als Faktor davor schreibt und dann die Hochzahl verkleinert. Aus -2 wird dadurch -3 (nicht -1 !). Am Ende schreibt man statt x^{-2} wieder einen Bruch. Das Minuszeichen würde ich vor dem Bruch stehen lassen.

(2) $\boxed{f(x)=\frac{2x+3}{x}}=\frac{2x}{x}+3=2+\frac{3}{x}=\boxed{2+3x^{-1}}$ $\quad f'(x)=3\cdot\left(-x^{-2}\right)=-\frac{3}{x^2}$

Jetzt muss man den Bruch zuerst in zwei Summanden zerlegen, kürzt und bringt x mit negativem Exponenten nach oben. Dann leitet man ab, wobei aus x^{-1} dann x^{-2} wird.

Am Ende bringt man den Term wieder in Bruchform.

(3) $\boxed{f(x)=\frac{x^3+x^2+5}{4x}}=\frac{x^3}{4x}+\frac{x^2}{4x}+\frac{5}{4x}=\boxed{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}x^{-1}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}x^{-2}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4x^2}=\frac{2x^3+x^2-5}{4x^2}$$

(4) $\boxed{f(x)=\frac{2x+1}{x^2}}=\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=\boxed{2x^{-1}+x^{-2}}$

$$f'(x)=-2x^{-2}-2x^{-3}=-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}=-\frac{2x+2}{x^3}$$

Eine Schwierigkeit liegt hier im Vorziehen des Minuszeichens, damit erhält der Zähler des 2. Bruches ein Pluszeichen. Wir leiten ein zweites Mal ab:

$$f''(x)=4x^{-3}+6x^{-4}=\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x^4}=\frac{4x+6}{x^4}$$

(5) $\boxed{f(x)=\frac{3x-2}{4x^3}}=\frac{3x}{4x^3}-\frac{2}{4x^3}=\boxed{\frac{3}{4}x^{-2}-\frac{1}{2}x^{-3}}$

$$f'(x)=-\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_2}x^{-3}+3\cdot\frac{1}{2}x^{-4}=-\frac{3}{2}x^{-3}+\frac{3}{2}x^{-4}$$

$$f'(x)=-\frac{3}{2x^3}+\frac{3}{2x^4}=\frac{-3x+3}{2x^4}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{x^4}$$

Aufgabe 4

(a) $f(x)=\frac{3x-5}{2x}$ (b) $f(x)=\frac{x^2-8}{3x}$ (c) $f(x)=\frac{4x^2-9}{x^3}$

(d) $f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{8x^2}$ (e) $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^3}$ (f) $f(x)=\frac{4x+2}{10x^2}$

4.2 Funktionsterme ohne x im Zähler, aber mit Summe im Nenner

Beispiel (6): $f(x)=\frac{4}{x^2+16} \Rightarrow \boxed{f(x)=4\cdot\left(x^2+16\right)^{-1}}$

Wie man sieht, schreibt man in diesem Fall den Nenner mit negativer Hochzahl als Faktor zum Zähler. Nun leitet man mit der Kettenregel ab. Diese wird anschaulich, wenn man zuerst den Klammerinhalt durch u substituiert: Setze $u = x^2 + 16$. Damit lautet die Funktion $f(x) = 4\cdot u^{-1}$.

Die Kettenregel verlangt nun, dass man erstens u^{-1} in $-u^{-2}$ ableitet, und dass man zweitens noch mit der Ableitung u' (innere Ableitung) multipliziert:

$$f'(x)=\boxed{4\cdot\left(-u^{-2}\right)\cdot u'}=-\frac{4}{u^2}\cdot u'$$

Wegen $u = x^2 + 16$ ist $u' = 2x$. Nun macht man die Substitution wieder rückgängig:

$$f'(x)=-\frac{4}{\left(x^2+16\right)^2}\cdot 2x=\boxed{-8\cdot\frac{x}{(x^2+16)^2}}$$

Das Ganze geht natürlich auch ohne Substitution: Man leitet die Klammer mit der Potenzregel ab: (-1 vor; neue Hochzahl - 2) und multipliziert mit der inneren Ableitung (der Klammer):

$$\boxed{f(x)=4\cdot\left(x^2+16\right)^{-1} \Rightarrow f'(x)=4\cdot(-1)\cdot\left(x^2+16\right)^{-2}\cdot 2x}$$

Ich schreibe zum besseren Verständnis die innere Ableitung auch dann hin, wenn sie 1 ist und man sei eigentlich weglassen könnte.

Beispiel (7): $f(x)=\frac{4}{x+2}=4(x+2)^{-1}$

$$f'(x)=-4(x+2)^{-2}\cdot\underbrace{1}_{\boxed{\text{innere Ableitung}=1}}=-\frac{4}{(x+2)^2}$$

Beispiel (8): $f(x)=\frac{6}{(x-1)^2}=6(x-1)^{-2}$

$$f'(x)=-12(x-1)^{-3}\cdot 1=-\frac{12}{(x-1)^3}$$

Beispiel (9): $f(x)=\frac{32}{(x^2-16)^2}=32(x^2-16)^{-2}$

$$f'(x)=-64(x^2-16)^{-3}\cdot 2x=-128\frac{x}{(x^2-16)^3}$$

Beispiel (10): $f(x)=\frac{-12}{x^2+4x}=-12(x^2+4x)^{-1}$

$$f'(x)=12(x^2+4x)^{-2}\cdot(2x+4)$$

$$=12\frac{2x+4}{(x^2+4x)^2}=24\frac{x+2}{(x^2+4x)^2}$$

Aufgabe 5 Berechne je zwei Ableitungen

(a) $f(x)=\frac{3}{4-x}$ (b) $f(x)=\frac{24}{x^2-4}$ (c) $f(x)=\frac{-8}{(x+3)^2}$ (d) $f(x)=\frac{-18}{(x^2-9x)^2}$

Die zweite Ableitung kann in b) und c) erst nach dem nächsten Abschnitt berechnet werden!

4.3 Funktionsterme mit x im Zähler und Summe im Nenner

Beispiel (11): $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+4}$

Quotientenregel: $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{\prime}=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Zähler: u(x) = 2x - 5 mit u'(x) = 2
Nenner: v(x) = x^2 + 4 mit v'(x) = 2x.

$$f'(x)=\frac{2(x^2+4)-2x(2x-5)}{(x^2+4)^2}=\frac{2x^2+8-4x^2+10x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+10x+8}{(x^2+4)^2}=-2\frac{x^2-5x-4}{(x^2+4)^2}$$

Zweite Ableitung: $$f''(x)=-2\frac{(2x-5)(x^2+4)^2-2(x^2+4)\cdot 2x\cdot(x^2-5x-4)}{(x^2+4)^4}$$

Aus der 1. Ableitung ist der Zähler $u(x)=x^2-5x-4$ also $u'(x)=2x-5$ und der Nenner $v(x)=\left(x^2+4\right)^2$. Dessen Ableitung wird mit der Kettenregel berechnet: $v'(x)=2\cdot\left(x^2+4\right)\cdot 2x$.

d. h.: Ableitung der Klammerpotenz multipliziert mit der inneren Ableitung (des Klammerterms).
Bei jeder 2. oder höheren Ableitung haben wir nun eine interessante Situation:
Der Klammerterm des Nenners tritt in beiden Summanden des Zählers auf und kann somit ausgeklammert werden, blau eingefärbt der Klammerterm:

$$f''(x)=-2\frac{(2x-5)(x^2+4)^2-2(x^2+4)\cdot 2x\cdot(x^2-5x-4)}{(x^2+4)^4}$$

Wir klammern im Zähler diesen Klammerterm aus:

$$f''(x)=-2\frac{(x^2+4)\left[(2x-5)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^2-5x-4)\right]}{(x^2+4)^4}$$

Nun können wir diesen Klammerterm kürzen:

$$f''(x)=-2\frac{\left[(2x-5)(x^2+4)-2\cdot 2x\cdot(x^2-5x-4)\right]}{(x^2+4)^3}$$

Die eckige Klammer wird im Zähler nicht mehr benötigt, und man kann ihn zusammenfassen:

$$f''(x)=-2\frac{2x^3-5x^2+8x-20-(4x^3-20x^2-16x)}{(x^2+4)^3}$$

Die Klammer im hinteren Teil des Zählers empfiehlt sich, weil man ohne diese Klammer die Vorzeichen ändern muss:

$$f''(x)=-2\frac{2x^3-5x^2+8x-20-4x^3+20x^2+16x}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=-2\frac{-2x^3+15x^2+24x-20}{(x^2+4)^3}=2\frac{2x^3.15x^2.24x+20}{(x^2+4)^3}$$

Beispiel (12) $\boxed{f(x) = \frac{2x-2}{3-x}}$

USW: